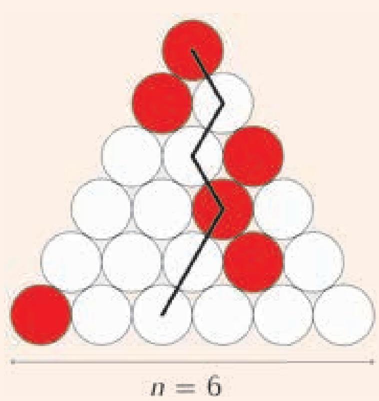
Hylke Hoogeveen, Mads Kok

Ninja-paden in Japanse driehoeken bij de IMO

Van 6 tot 13 juli werd de Internationale Wiskunde Olympiade gehouden in Chiba, Japan. Deze wedstrijd bestaat uit twee dagen, en op elke dag hebben de deelnemers 4,5 uur de tijd om drie opgaven op te lossen. Er zaten maar liefst twee Nederlandse creaties in de wedstrijdpaper, waaronder opgave 5 van de hand van oud-deelnemers/-trainers Daniël Kroes en Merlijn Staps. Hieronder presenteren medaillewinnaars Mads en Hylke elk hun eigen aanpak van deze opgave over zogenaamde 'Japanse driehoeken'.

Opgave 5

Zij n een (strikt) positief geheel getal. Een *Japanse driehoek* bestaat uit $1 + 2 + ... + n$ cirkels die in de vorm van een gelijkzijdige driehoek liggen, zodanig dat voor elke $i = 1, 2, ..., n$, de i^{de} rij precies i cirkels bevat, waarvan precies één rood gekleurd is. Een *ninja-pad* in een Japanse driehoek is een opeenvolging van n cirkels, verkregen door te starten met de cirkel in de bovenste rij, dan herhaaldelijk van een cirkel naar een van de twee cirkels direct daaronder te gaan, en te eindigen met een cirkel in de onderste rij. Hier is een voorbeeld van een Japanse driehoek waarbij $n = 6$, met daarin een ninja-pad dat twee rode cirkels bevat.



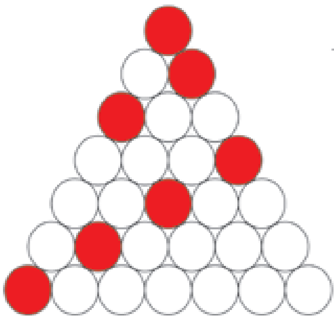
figuur 1

Bepaal, als functie van n, de grootste k zodanig dat er in elke Japanse driehoek een ninja-pad is dat op zijn minst k rode cirkels bevat.

Oplossing van Mads

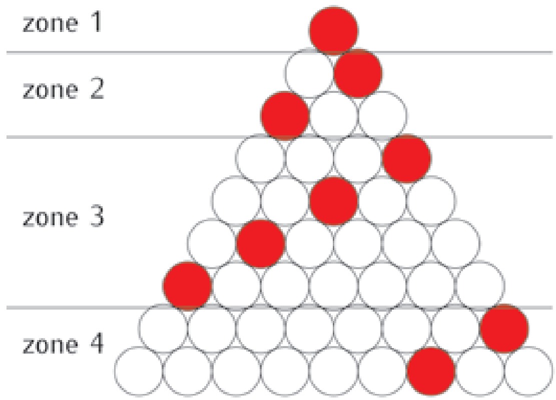
Het is altijd een goed idee om eerst kleine waarden voor n te gaan proberen, zodat je een vermoeden kunt krijgen voor wat k is als functie van n. Laten we dus eens beginnen met $n = 1$. Dan heb je alleen maar een rij met een rode cirkel, dus daaruit volgt dat $k = 1$.
Stel dat $n = 2$. Elk ninja-pad gaat door de bovenste rode cirkel en een van de ninja-paden gaat ook door de rode cirkel op de tweede rij, dus $k = 2$.
Stel dat $n = 3$. Je kunt aannemen dat de rode cirkel op de tweede rij rechts zit (want als hij links zit heb je precies dezelfde situatie maar dan gespiegeld). Als de rode cirkel op de derde rij helemaal links zit is er geen ninja-pad dat door alle drie de rode cirkels gaat, maar er is er wel een die door de eerste twee gaat, dus geldt weer dat $k = 2$.

Stel nu dat $n = 4$. Je kunt daarvoor weer aannemen dat de rode cirkel op de tweede rij rechts zit. Als de rode cirkel op de derde rij niet links zit, is er een ninja-pad dat door de eerste drie rode cirkels gaat. Als deze rode cirkel wel links zit is er voor elke cirkel op de derde rij een ninja-pad dat in de eerste drie rijen door twee rode cirkels gaat en in die cirkel eindigt, wat betekent dat - waar de rode cirkel op de vierde rij ook zit - er altijd een ninja-pad is dat door drie rode cirkels gaat (twee op de eerste drie rijen en één op de laatste rij). Dus $k \geq 3$. Als n gelijk is aan 5, 6 of 7 geldt dus ook dat $k \geq 3$; neem maar een ninja-pad dat drie rode cirkels uit de bovenste vier rijen bevat. Bovendien kun je voor elk van deze waarden van n de rode cirkels zo plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door vier rode cirkels gaat, dus er geldt dat $k \geq 3$; plaats hiervoor de rode cirkels zoals in de bovenste n rijen van figuur 2. Het is bij dit voorbeeld voor $n \geq 7$ nu weer zo dat er voor elke cirkel op de onderste rij een ninja-pad is dat door drie rode cirkels gaat en in die cirkel eindigt, waardoor ik het vermoeden kreeg dat $k = 4$ voor $n = 8$.



n	k
1	1
2, 3	2
4, 5, 6, 7	3
8, …	4

figuur 2

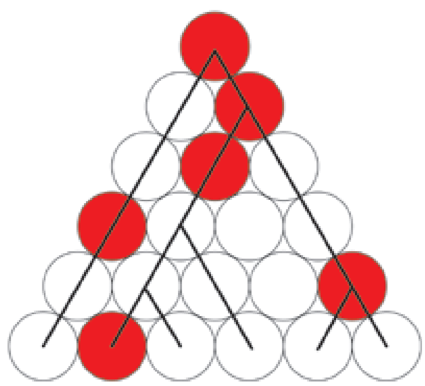


figuur 3

Als je dus kijkt naar de waarden van n waarbij k met één toeneemt, dan zijn dat: (1), 2, 4 en vermoedelijk 8. Dit zijn de tweemachten, dus het lijkt erop dat k gelijk is aan ${}^2\log(n)+1$ naar beneden afgerond, oftewel, als je x definieert als het gehele getal waarvoor geldt dat $2^{x-1} \leq n < 2^x$, dan lijkt k gelijk te zijn aan x. Het bewijs moet nu bestaan uit twee delen:
ik moet bewijzen dat je de rode cirkels zo kunt plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door $x + 1$ rode cirkels gaat, en daarnaast dat er altijd (dus voor elke Japanse driehoek) een ninja-pad is dat door minstens x rode cirkels gaat.

Allereerst zal ik laten zien dat je de rode cirkels zo kunt plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door $x + 1$ rode cirkels gaat. In de kleine gevallen lijkt een patroon te zitten; de rode cirkels liggen telkens op een schuine rechte lijn en bij het bereiken van de linkercirkel, beginnen we in de rij daarna weer bij de rechtercirkel. Dus laten we proberen om dat te generaliseren. Deel de driehoek daarvoor op in zones, zodat de i-de zone van de 2^{i-1}-de rij tot en met de $(2i - 1)$-de rij gaat (dus zone 1 bestaat uit rij 1, zone 2 bestaat uit rijen 2 en 3, zone 3 bestaat uit rijen 4 tot en met 7, enzovoorts, zie figuur 3). Kies nu als rode cirkel in de $(2^{i-1} + j)$-de rij de $(2^{i-1} - j)$-de cirkel (dus de 2^{i-1}-de cirkel in de 2^{i-1}-de rij, de $(2^{i-1} - 1)$-de cirkel in de volgende rij, de $(2^{i-1} - 2)$-de cirkel in de volgende rij, enzovoorts). Omdat de rode cirkels steeds met twee stappen naar links gaan en een ninja-pad maar met één naar links (of naar rechts), is het niet mogelijk dat een ninja-pad door twee rode cirkels in dezelfde zone gaat. Vanwege de definitie van x als $2^{x-1} \leq n < 2^x$ zijn er precies x zones en gaat een ninja-pad voor deze Japanse driehoek door hoogstens x rode cirkels.

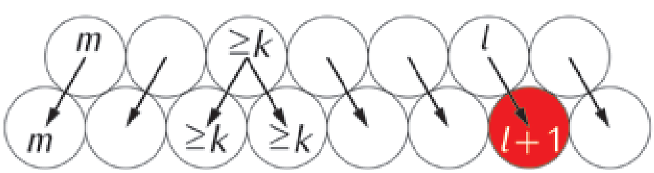
Nu moet ik nog bewijzen dat er voor elke Japanse driehoek een ninja-pad is dat door x rode cirkels gaat. We hebben hierboven voorbeelden gezien voor $n = 3$ en $n = 7$ waarin een ninja-pad met respectievelijk twee en drie rode cirkels bij elke cirkel op de onderste rij kan eindigen. Dat bracht mij op het idee om (gegeven een Japanse driehoek) de *waarde* van een cirkel te definiëren als het maximale aantal rode cirkels dat een ninja-pad kan hebben als het in die cirkel eindigt, en om vervolgens de waarden van alle cirkels op de onderste rij bij elkaar op te tellen; hopelijk kunnen we dan bewijzen dat minstens één van die cirkels een grote waarde heeft. In het voorbeeld van figuur 4 zou je met de (optimale) ninja-paden die ik heb ingetekend uitkomen op een som van $2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$. Omdat deze som natuurlijk afhangt van waar de rode cirkels zich precies bevinden, heb ik besloten om naar het minimum van deze som te kijken en deze $f(n)$ te noemen.



figuur 4

>

Vervolgens ging ik kijken of ik $f(n+1)$ kon uitdrukken in $f(n)$, waarbij we veronderstellen dat we voor n al weten dat er een ninja-pad is dat op zijn minst k rode cirkels bevat. Er is dan dus een cirkel in de n-de rij die een waarde heeft van minstens k. De twee cirkels hieronder hebben dan ook een waarde van minstens k, want je kunt het ninja-pad dat door minstens k rode cirkels gaat en bij die cirkel in de n-de rij eindigt ook nog een cirkel langer maken. Alle cirkels op de $n+1$-ste rij links van deze twee cirkels hebben om dezelfde reden een waarde die minstens zo groot is als de waarde van de cirkel rechtsboven die cirkel, en alle cirkels op de $n+1$-ste rij rechts van deze twee cirkels hebben een waarde die minstens zo groot is als de waarde van de cirkel linksboven die cirkel. Met andere woorden: elke cirkel op de $n+1$-ste rij heeft een waarde die minstens zo groot is als de cirkel op de rij erboven die in figuur 5 met een pijl verbonden is. Zo heb ik elke cirkel op de $n+1$-ste rij gekoppeld aan een cirkel op de n-de rij en elke cirkel op de n-de rij gekoppeld aan een cirkel op de $n+1$-ste rij (behalve de cirkel die het eindpunt is van een ninja-pad door minstens k rode cirkels, die is gekoppeld aan twee cirkels op de $n+1$-ste rij). Dus alle waarden die je op de $n+1$-ste rij hebt zijn minstens die op de rij daarboven, en je hebt een extra getal dat minstens k is (van die ene cirkel die met *twee* cirkels in de rij daaronder correspondeert). Die waarden op de n-de rij hebben als som minstens $f(n)$, dus hieruit volgt dat $f(n+1) \geq f(n) + k$. Daarnaast heb je ook nog ergens de rode cirkel op de $n+1$-ste rij, dus de waarde van die cirkel is minstens 1 meer dan die van de corresponderende cirkel op de n-de rij, dus
$f(n+1) \geq f(n) + k + 1$.



figuur 5

Toen bedacht ik dat als ik voor tweemachten 2^a kon bewijzen dat $f(2^a) \geq a2^a + 1$, dat dan uit het ladenprincipe volgt dat $k \geq a + 1$. Het getal $f(2^a)$ is immers de som van 2^a waarden (die van de onderste rij cirkels), en als die waarden allemaal hoogstens a zouden zijn, zou $f(2^a) \leq a2^a$; tegenspraak. Er is dus minstens een van die waarden gelijk aan minstens $a + 1$. Dat ben ik dus met inductie gaan bewijzen. Als $a = 0$ heb je $f(1) = 1$ (dat volgt uit de definitie van f) en dat is inderdaad minstens $0 \cdot 2^0 + 1 = 1$.
Als je weet dat $f(2^a) \geq a2^a + 1$, dan geldt voor $n = 2^a$ vanwege het ladenprincipe zoals eerder al genoemd dat $k \geq a + 1$, en omdat als n groter wordt k niet kleiner kan worden, geldt als $n \geq 2^a$ altijd dat $k \geq a + 1$ en dus dat
$f(n+1) \geq f(n) + k + 1 \geq f(n) + a + 2$.
Hieruit volgt dat
$f(2^{a+1}) \geq f(2^{a+1} - 1) + a + 2 \geq$
$f(2^{a+1} - 2) + 2a + 4$,
en als je dit de hele tijd herhaalt, zie je dat
$f(2^{a+1}) \geq f(2^a) + 2^a(a + 2) =$
$f(2^a) + a2^a + 2^{a+1} \geq (a2^a + 1) + a2^a + 2^{a+1} =$
$(a+1)\, 2^{a+1} + 1$,
waarmee de inductie klaar is. Dus als n gelijk is aan 2^{x-1}, is k minstens $(x-1) + 1 = x$.
Dus als n minstens 2^{x-1} is, is k ook minstens x, dus dan is er altijd een ninja-pad met minstens x rode cirkels. Dus als $2^{x-1} \leq n < 2^x$ is er altijd een ninja-pad dat door x rode cirkels gaat. Maar we hebben ook gezien dat er niet altijd een ninja-pad is dat door $x + 1$ rode cirkels gaat. Daarmee hebben we bewezen dat $k = x$.

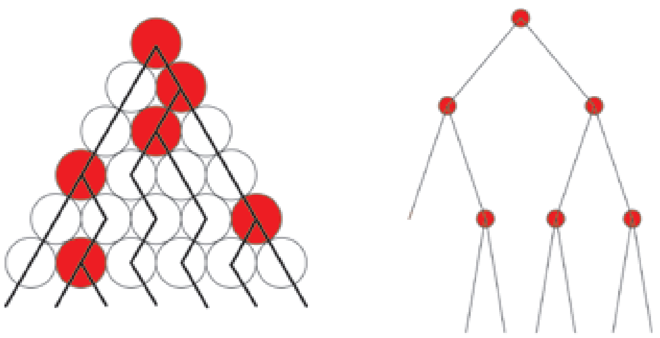
Oplossing van Hylke

Net als Mads was ook ik begonnen met het invullen van kleine getallen om een vermoeden te krijgen, een van de eerste lessen bij de training van de Wiskunde Olympiade. Bijna alle leden van ons team kwamen hierdoor op het vermoeden dat $k = x$ bij $2^{x-1} \leq n < 2^x$ en hadden daarbij de hierboven door Mads beschreven 'worst case' gevonden met een rode cirkel per zone voor elk mogelijk ninja-pad. Nadat ik tijdens de wedstrijd ook dit voorbeeld had bedacht en natuurlijk netjes had opgeschreven om de eerste punten binnen te harken, ging ik nadenken over hoe ik de andere kant zou kunnen bewijzen: dat je bij een Japanse driehoek met 2^{x-1} rijen altijd een ninja-pad met minstens x rode cirkels kunt vinden.

Tijdens de wedstrijd kwam ik hier ondanks vele pogingen niet uit. Toen we na de wedstrijd terugliepen voor de lunch werden de opgaven natuurlijk uitgebreid besproken en legde Mads mij zijn oplossing uit. Ik was uiteraard erg blij dat mijn vermoeden en constructie klopten, maar omdat ik bij de wedstrijd niks had opgeschreven dat ook maar een begin was van Mads' bewijs van die andere kant, verwachtte ik niet meer dan 2 punten voor deze opgave. Twee dagen later, toen we samen met onze

Japanse gids Tokyo aan het verkennen waren, kregen we echter van onze nakijkers via de app de scores terug. Het bleek dat ik 5 punten had gehaald voor deze opgave. Hier was ik vrij verbaasd over; waar had ik al die extra punten vandaan gehaald?

In mijn aanpak tijdens de wedstrijd ging ik er steeds vanuit dat in een Japanse driehoek met 2^{x-1} rijen elk ninja-pad maximaal $x - 1$ rode cirkels bevat en probeerde ik hier een tegenspraak in te vinden. Dat zou namelijk betekenen dat er een ninja-pad met x rode cirkels moet zijn. Om die tegenspraak te vinden probeerde ik een boel verschillende ninjapaden te maken, die het liefst samen zo veel mogelijk rode cirkels bevatten. Laten we daarom beginnen met de rode cirkel bovenin en van daaruit eens twee paden starten naar de twee cirkels eronder. Laten we nu het pad naar de rode cirkel splitsen naar de twee cirkels eronder, zo krijgen we immers meer paden met die rode cirkel, en het pad naar de witte cirkel doortrekken naar de derde cirkel. Dit kunnen we herhalen door in elke rij het pad naar de rode cirkel te splitsen naar de twee cirkels eronder en de rest van de paden door de witte cirkels door te trekken; zie figuur 6 (links). Dit gaat precies goed, want elke rij heeft één rode cirkel en dus één splitsing, wat goed gaat omdat de volgende rij één cirkel meer heeft.



figuur 6

Volgens onze aanname bevatten alle paden maximaal $x - 1$ rode cirkels, dus zijn ze maximaal $x - 1$ keer gesplitst. We kunnen onze Japanse driehoek met splitsingen daarom zien als een wiskundige binaire boom met hoogte (hooguit) $x - 1$; het linkerplaatje (bij $n = 6$) gaat daarbij over in het rechterplaatje, waarin alleen de rode cirkels een rol spelen en de rest van de doorgaande paden wordt samengetrokken. Zo'n binaire boom met hoogte (hooguit) $x - 1$ heeft aan het einde hooguit 2^{x-1} takken.

Dit zou betekenen dat onze Japanse driehoek met $n = 2^{x-1}$ maximaal 2^{x-1} paden kan hebben.

Hoewel ik dit tijdens de wedstrijd nog wel had bedacht, had ik me niet gerealiseerd dat ik hiermee het probleem in feite had opgelost. Kijken we immers weer naar het linkerplaatje, dan zien we dat - als we ook de splitsing van de rode cirkel op de onderste rij meetellen - we bij een Japanse driehoek met n rijen $n + 1$ paden hebben. Voor $n = 2^{x-1}$ rijen hebben we dus $2^{x-1} + 1$ paden. Maar dat is in tegenspraak met onze constatering in de vorige alinea dat onze Japanse driehoek met $n = 2^{x-1}$ maximaal 2^{x-1} paden kan hebben. Vanwege deze tegenspraak moet er wel een ninja-pad zijn met x rode cirkels, oftewel $k = x$.

Deze uiteindelijk zeer elementaire oplossing was voorafgaand aan de wedstrijd nog niet bekend bij de nakijkers en de jury. De makers van de opgave, Daniël en Merlijn, hadden de opgave op Mads' manier bewezen en ook in het comité dat de opgaven voor de Internationale Wiskunde Olympiade selecteert had niemand dit bewijs bedacht. Gelukkig bedacht aan het eind van de eerste nakijkdag een jurylid deze oplossing en liet die ook aan onze begeleiders zien. Die realiseerden zich toen dat ze deze constructie van paden en de vertaalslag naar binaire bomen ook waren tegengekomen in mijn werk. Ook al had ik me niet gerealiseerd dat ik zo dicht bij de oplossing was, eigenlijk ontbrak er nog maar één concluderende zin om de gezochte tegenspraak af te leiden. Uiteindelijk bleek ik bovendien de enige van alle meer dan zeshonderd deelnemers te zijn die met deze aanpak punten had gescoord. Dit was natuurlijk erg speciaal en ik vond het extra leuk dat het ook nog eens bij een door Nederlandse makers bedachte opgave was.

Over de twee wedstrijddagen hadden Mads en ik naast deze opgave ook nog opgaven 1 en 4 opgelost en ook nog een paar punten behaald voor opgave 2. Hierdoor kwam ik uit op 22 punten en Mads op 24. Mads' score was helaas net een punt te weinig voor een zilveren medaille, maar wel net als de mijne genoeg voor een bronzen plak. Ook alle anderen hadden een medaille en zelfs allemaal minstens de helft van de punten. Dit kwam vooral doordat we bij opgaves 2 en 5 allemaal onze vele ideeën duidelijk hadden opgeschreven waardoor we, zoals in mijn geval, vaak nog punten voor die opgaves konden halen zonder ze compleet opgelost te hebben. Hierdoor zijn we als land 29e van de 112 deelnemende landen geworden, een voor Nederland erg goede notering.

>

Over de auteurs

Mads Kok (16) is oud-leerling van het Utrechts Stedelijk Gymnasium. De afgelopen twee jaar vertegenwoordigde hij Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde daar achtereenvolgens een eervolle vermelding en een bronzen medaille. Inmiddels studeert hij wiskunde en sterrenkunde aan de Universiteit Leiden.
E-mailadres: *madsskok@gmail.com*

Hylke Hoogeveen (18) is oud-leerling van het Openbaar Lyceum Zeist. Hij vertegenwoordigde Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2021 en 2023 en behaalde daar beide keren een bronzen medaille. Over zijn ervaringen met een opgave bij IMO2021 schreef hij eerder al het artikel 'Kaartjes en kwadraten' voor Euclides. Inmiddels studeert hij wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *hylkehoogeveen117@gmail.com*